Durée : 144 minutes

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Algèbre linéaire
Examen
Partie commune
Automne 2015

Réponses

Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :

$+3$ points si la réponse est correcte,
0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs croix,
-1 point si la réponse est incorrecte.

Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :

$+1$ points si la réponse est correcte,
0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs croix,
-1 point si la réponse est incorrecte.

Les notations et la terminologie de cet énoncé sont celles utilisées dans les séries d'exercices et le cours d'Algèbre linéaire du semestre d'Automne 2015.

Notation

– Pour une matrice A, a_{ij} désigne l'élément situé sur la ligne i et la colonne j de la matrice.
– Pour un vecteur $\vec{x}$, x_i désigne la i-ème coordonnée de $\vec{x}$.
– I_m désigne la matrice identité de taille $m \times m$.
– $\mathbb{P}_n$ désigne l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n.
– Pour $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, le produit scalaire canonique est défini par $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{x}^T \vec{y}$.

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 : Soit A une matrice de taille 5×6 et soit $\vec{b} \in \mathbb{R}^5$ un vecteur. L'ensemble des solutions de l'équation matricielle $A\vec{x} = \vec{b}$ ne peut jamais être

■ un ensemble fini non-vide.
□ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^6$ de dimension égale à 1.
□ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^6$ de dimension égale à 2.
□ l'ensemble vide.

Question 2 : On considère un ensemble $\mathcal{F}$ de polynômes $p_1, \ldots, p_5$, tels que le degré de p_k est égal à k pour $k = 1, \ldots, 5$. Alors

□ on peut obtenir une base de $\mathbb{P}_5$ en ajoutant le polynôme $p(t) = t^5 - t$ à l'ensemble $\mathcal{F}$.
□ on peut extraire une base de $\mathbb{P}_5$ de l'ensemble $\mathcal{F}$.
□ l'ensemble $\mathcal{F}$ forme une base de $\mathbb{P}_5$.
■ on peut obtenir une base de $\mathbb{P}_5$ en ajoutant le polynôme $p(t) = 5$ à l'ensemble $\mathcal{F}$.

Question 3 : Soient A et B deux matrices inversibles de même taille. Si $C = AB$ et $D = A^T + B^T$, alors

□ D est toujours inversible, mais C ne l'est pas forcément.
□ aucune des deux matrices n'est nécessairement inversible.
□ C et D sont toujours inversibles.
■ C est toujours inversible, mais D ne l'est pas forcément.

Question 4 : Soient

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2h-4 \\ -3-h \end{pmatrix}$$

où $h \in \mathbb{R}$ est un paramètre. Alors l'équation matricielle $A\vec{x} = \vec{b}$

■ possède une infinité de solutions pour $h = 3$.
□ possède une infinité de solutions pour $h = -3$.
□ possède un nombre fini de solutions pour toute valeur $h \in \mathbb{R}$.
□ possède une infinité de solutions pour toute valeur $h \neq \pm 3$.

Question 5 : Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$. Parmi les quatre affirmations suivantes, trois sont équivalentes. Laquelle ne l'est pas ?

- ☐ L'ensemble des colonnes de A forme une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.
- ■ $\det A = 1$.
- ☐ L'ensemble des lignes de A forme une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.
- ☐ $AA^T = I_n$.

Question 6 : Soit B une matrice de taille $m \times n$ telle que $BB^T = I_m$. Alors,

- ☐ les colonnes de B forment un ensemble orthonormé.
- ■ les lignes de B forment un ensemble orthonormé.
- ☐ $B^T B = I_n$.
- ☐ B est inversible.

Question 7 : Soit $A = \begin{pmatrix} 7 & -24 \\ -24 & -7 \end{pmatrix}$. Si $A = PDP^T$ est une diagonalisation en base orthonormée, alors P peut s'écrire comme

- ☐ $P = \begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 \\ 3/5 & -4/5 \end{pmatrix}$.
- ☐ $P = \begin{pmatrix} 5/13 & 12/13 \\ 12/13 & -5/13 \end{pmatrix}$.
- ■ $P = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix}$.
- ☐ $P = \begin{pmatrix} 12/13 & 5/13 \\ 5/13 & -12/13 \end{pmatrix}$.

Question 8 : Il existe un polynôme $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ avec des coefficients réels a_0, a_1, a_2 tel que

$$p(-1) = 1, \qquad p(0) = 1, \qquad p(1) = 3, \qquad p(2) = b,$$

- ■ pour une seule valeur réelle de b.
- ☐ pour aucune valeur réelle de b.
- ☐ pour toute valeur réelle de b.
- ☐ pour un ensemble fini d'au moins deux valeurs réelles différentes de b.

Question 9 : L'aire du triangle ayant pour sommets les points

$$(0,0), \quad (-1,5), \quad (3,-1)$$

est égale à

- ■ 7.
- ☐ 8.
- ☐ 16.
- ☐ 14.

Question 10 : Soient

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La projection orthogonale de $\vec{x}$ sur le sous-espace span $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ est:

☐ $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. ■ $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$. ☐ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. ☐ $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Question 11 : La valeur du paramètre $b \in \mathbb{R}$ telle que le vecteur $\vec{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$ appartient au plan de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est:

- ☐ $b = 2$.
- ☐ $b = -1$.
- ■ $b = -5$.
- ☐ $b = -2$.

Question 12 : Soient A une matrice de taille $m \times n$, $\vec{b}$ un vecteur dans $\mathbb{R}^m$ et $\widehat{b}$ la projection orthogonale de $\vec{b}$ sur $\operatorname{Im} A$. Alors,

- ☐ la solution de $A\vec{x} = \vec{b}$ au sens des moindres carrés est $A^{-1}\widehat{b}$.
- ☐ la matrice $A^T A$ est inversible.
- ■ chaque solution de $A^T A\vec{x} = A^T\vec{b}$ est une solution de $A\vec{x} = \vec{b}$ au sens des moindres carrés.
- ☐ l'équation $A\vec{x} = \widehat{b}$ possède une solution unique.

Question 13 : Soient

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{une matrice et} \quad \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

une base de l'espace vectoriel des matrices symétriques de taille 2×2. La troisième coordonnée de la matrice A dans la base $\mathcal{B}$ est

- ■ 9.
- ☐ -3.
- ☐ 2.
- ☐ 1.

Question 14 : Le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

est égal à

- ☐ 24.
- ☐ 12.
- ☐ -12.
- ■ -24.

Question 15 : Soient A et B deux matrices carrées de même taille. On suppose que B est une matrice inversible. Soit λ une valeur propre de A et aussi de B. Parmi les affirmations suivantes

(a) λ est valeur propre de la matrice $A + B$,

(b) λ est valeur propre de la matrice AB,

(c) λ est valeur propre de la matrice BAB^{-1},

(d) λ^2 est valeur propre de la matrice BA,

lesquelles sont toujours vraies?

- ■ seulement (c).
- ☐ (a), (c) et (d).
- ☐ seulement (d).
- ☐ (a) et (b).

Question 16 : Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \\ -2 & 11 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer la factorisation LU de A (en utilisant seulement les opérations élémentaires sur les lignes consistant à additionner un multiple d'une ligne à une autre ligne en dessous). Alors l'élément ℓ_{31} de L est égal à

- ☐ 2.
- ☐ 3.
- ☐ -1.
- ■ -2.

Question 17 : Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & -3 \\ 2 & 6 & -4 \end{pmatrix}.$$

Si $B = A^{-1}$, alors l'élément b_{11} de B est égal à

- □ -1.
- ■ $-\frac{1}{5}$.
- □ $\frac{1}{5}$.
- □ $\frac{1}{3}$.

Question 18 : Soient la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ et le vecteur $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Alors la solution au sens des moindres carrés $\widehat{x} = \begin{pmatrix} \widehat{x}_1 \\ \widehat{x}_2 \end{pmatrix}$ de l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ est telle que

- ■ $\widehat{x}_2 = 3$.
- □ $\widehat{x}_2 = -3$.
- □ $\widehat{x}_2 = 4$.
- □ $\widehat{x}_2 = -4$.

Question 19 : On considère la transformation $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{P}_2$ donnée par

$$T\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = (c-b) + (a-2b+c)t + (a-b)t^2$$

Alors

- □ T est linéaire et son rang vaut 1.
- ■ T est linéaire et son rang vaut 2.
- □ T est linéaire et son noyau est $\{\vec{0}\}$.
- □ T n'est pas linéaire.

Question 20 : Soit h un paramètre réel. Les vecteurs

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ h \\ 1 \end{pmatrix}$$

forment une base de $\mathbb{R}^4$

- □ seulement si $h = 0$.
- ■ seulement si $h \neq \frac{1}{2}$.
- □ seulement si $h = \frac{1}{2}$.
- □ seulement si $h \neq 0$.

Question 21 : Le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} -x_1 \qquad - 2x_3 \qquad = 0 \\ \qquad x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ \quad - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

- ☐ ne possède aucune variable libre.
- ☐ possède deux variables libres.
- ■ possède une variable libre.
- ☐ possède trois variables libres.

Question 22 : Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors

- ☐ la seule valeur propre de A est 2.
- ☐ les valeurs propres de A sont 0, 2 et -2.
- ☐ les valeurs propres de A sont 1, -1, 2 et -2.
- ■ les valeurs propres de A sont 2 et -2.

Question 23 : Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & -2 \end{pmatrix}.$$

Alors

- ☐ A possède trois valeurs propres distinctes.
- ☐ A est diagonalisable en base orthonormée.
- ☐ A est diagonalisable mais pas en base orthonormée.
- ■ A n'est pas diagonalisable.

Question 24 : Soit $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformation linéaire définie par

$$T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4x_3 \\ 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 \end{pmatrix}. \text{ Soit } \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Alors la matrice M de T par rapport à la base $\mathcal{B}$, telle que $\big[T(\vec{x})\big]_{\mathcal{B}} = M\big[\vec{x}\big]_{\mathcal{B}}$ pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, est:

- ☐ $M = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 0 & 8 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.
- ☐ $M = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 2 & 6 & -8 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.
- ■ $M = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ -2 & -8 & -3 \end{pmatrix}$.
- ☐ $M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 6 & 8 & 3 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire, si elle est parfois fausse).

Question 25 : Le noyau de toute transformation linéaire surjective $T\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ est toujours de dimension 1.

■ VRAI ☐ FAUX

Question 26 : Soit $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une transformation linéaire injective et soit $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ un ensemble linéairement indépendant de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Alors $\{T(\vec{v}_1), T(\vec{v}_2), \ldots, T(\vec{v}_p)\}$ est un ensemble linéairement indépendant de vecteurs de $\mathbb{R}^m$.

■ VRAI ☐ FAUX

Question 27 : Soit $p \in \mathbb{P}_n$ un polynôme et p' sa dérivée.
L'ensemble $\left\{p \in \mathbb{P}_n \mid p'(-1) \neq 0\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{P}_n$.

☐ VRAI ■ FAUX

Question 28 : Si A est une matrice de taille 4×4 de rang 1 et $\lambda = 0$ est une valeur propre de A de multiplicité algébrique 3, alors A est diagonalisable.

■ VRAI ☐ FAUX

Question 29 : Soit A une matrice de taille 7×3 dont les deux premières colonnes sont linéairement indépendantes et la troisième colonne est égale à la première. Alors la matrice A^TA est une matrice carrée de taille 3×3, symétrique et de rang 2.

■ VRAI ☐ FAUX

Question 30 : Soit A une matrice de taille $m\times n$. Si B est obtenue à partir de A à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes, alors $\mathrm{Im}(A^T) = \mathrm{Im}(B^T)$.

■ VRAI ☐ FAUX

Question 31 : Soit A une matrice de taille $m\times n$. Si $\vec{x} \in \mathrm{Im}(A)$ est tel que $A^T\vec{x} = \vec{0}$, alors $\|\vec{x}\| = 0$.

■ VRAI ☐ FAUX

Question 32 : Soient A une matrice de taille $n\times n$ et λ un nombre réel non nul. Si le système homogène $A\vec{x} = \vec{0}$ admet exactement une solution, alors l'ensemble des colonnes de la matrice $(\lambda A)^T$ engendre $\mathbb{R}^n$.

■ VRAI ☐ FAUX